

DM de mathématiques n°1

Logique

à rendre pour le jeudi 11 septembre

Exercice-problème 1

On veut déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) + f(f(n)) = 2n \quad (\text{E})$$

1) On pose la fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n$. Montrer que g vérifie l'équation (E).

2) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifie (E).

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

b) En déduire $f(0)$.

c) En raisonnant par disjonction de cas, déterminer $f(1)$.

d) Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (f(m) = f(n) \implies m = n)$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad f(k) = k$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n+1) \geq n+1$, puis que $f(n+1) \leq n+1$. Conclure.

f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$.

3) Conclure, en précisant le type de raisonnement utilisé.

Exercice 2 (facultatif et plus difficile)

En utilisant le fait (admis) que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, i.e. qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b des entiers.